

OBSERVATOIRE DE PARIS - ÉCOLE DOCTORALE 127
INSTITUT DE MÉCANIQUE CÉLESTE ET DE CALCUL DES ÉPHÉMÉRIDES
Astronomie et Systèmes Dynamiques

Les quasi-satellites et autres configurations remarquables en résonance co-orbitale

ALEXANDRE POUSSE

sous la direction de

PHILIPPE ROBUTEL & ALAIN VIENNE

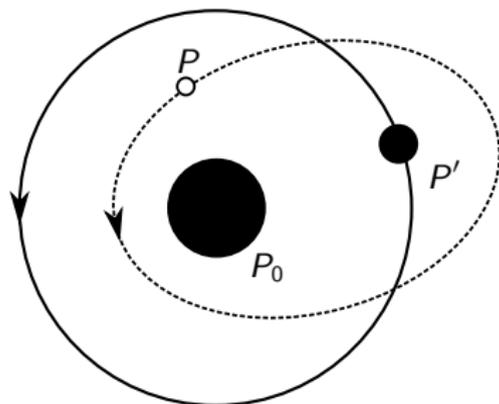
Soutenance de Doctorat - 30 septembre 2016



Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides

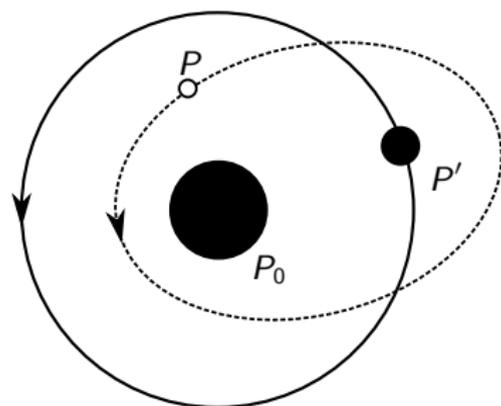
Introduction à la résonance co-orbitale

Référentiel héliocentrique



Introduction à la résonance co-orbitale

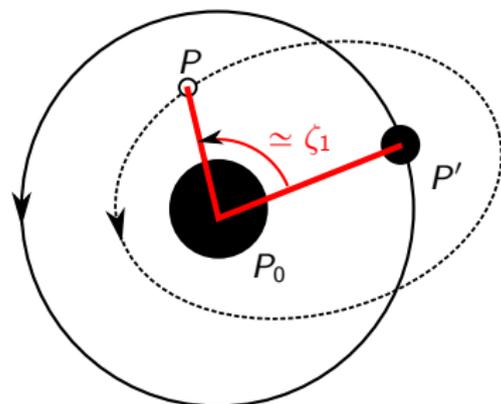
Référentiel héliocentrique



- ▶ P, P' : périodes de révolution identique autour de P_0
- ▶ Résonance en moyen mouvement 1/1
- ▶ Angle résonant noté ζ_1

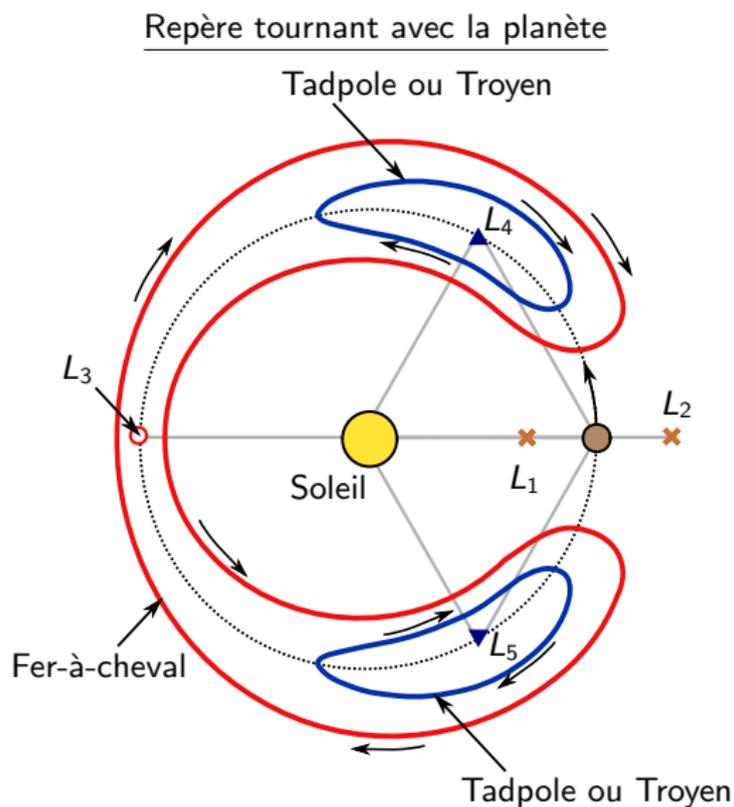
Introduction à la résonance co-orbitale

Référentiel héliocentrique



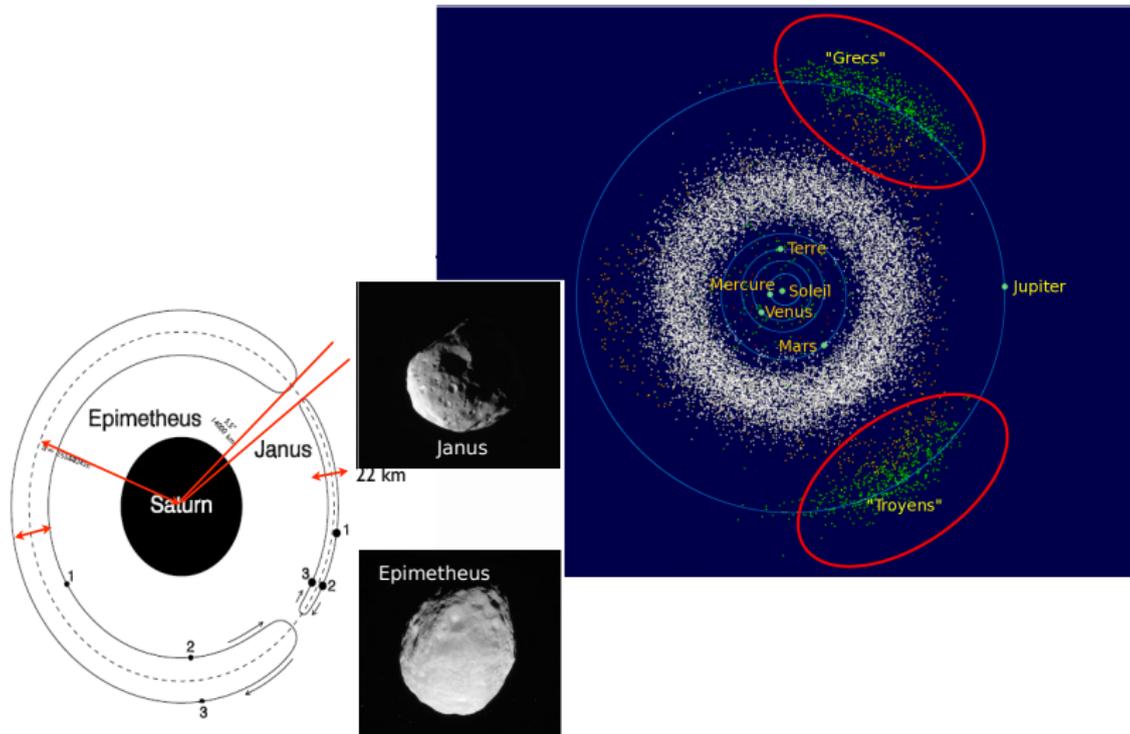
- ▶ P, P' : périodes de révolution identique autour de P_0
- ▶ Résonance en moyen mouvement 1/1
- ▶ Angle résonant noté ζ_1

Configurations classiques en résonance co-orbitale

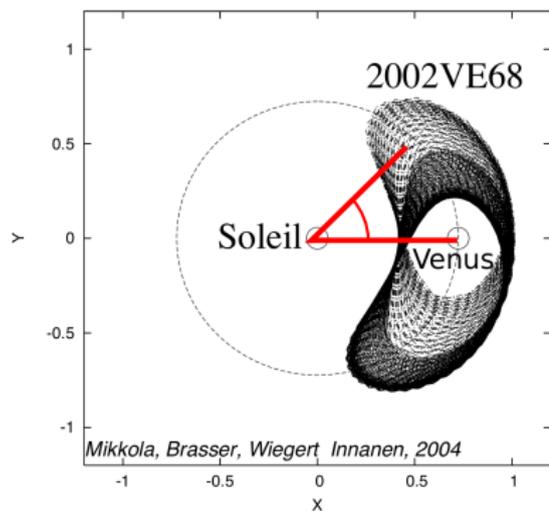


Configurations classiques en résonance co-orbitale

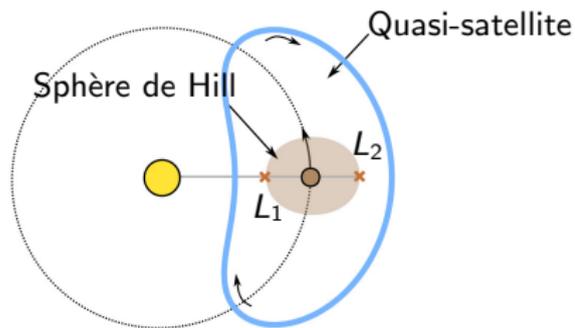
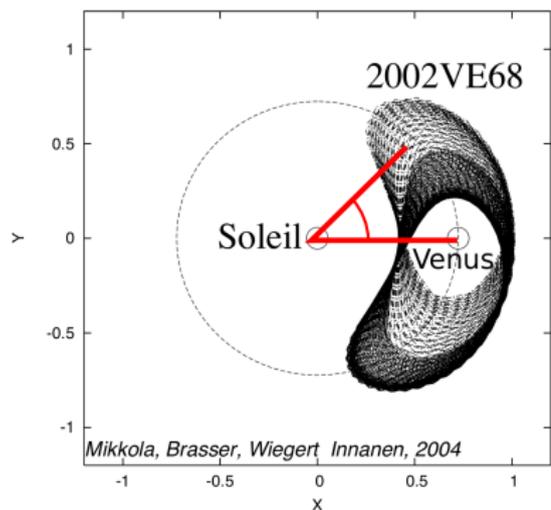
Exemples dans le système solaire



Autre exemple de dynamique en résonance co-orbitale :

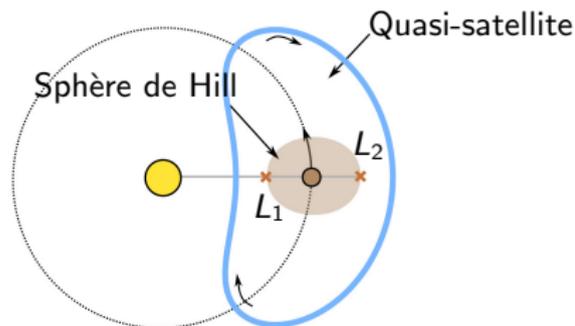
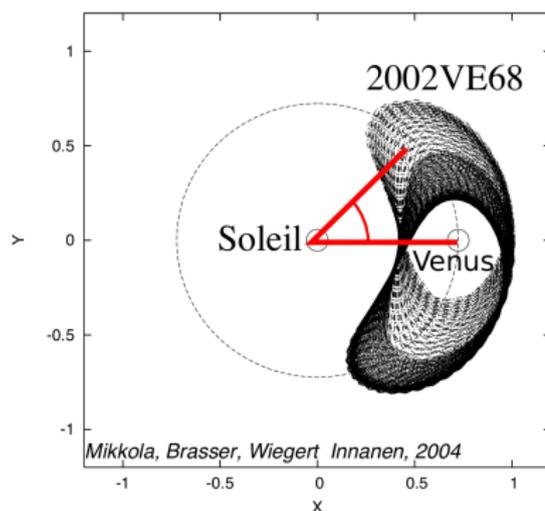


Autre exemple de dynamique en résonance co-orbitale : les quasi-satellites



Quasi-satellite : Satellite rétrograde à l'extérieur de la sphère de Hill

Autre exemple de dynamique en résonance co-orbitale : les quasi-satellites



Quasi-satellite : Satellite rétrograde à l'extérieur de la sphère de Hill

Pas une lune !

- ▶ Trajectoire héliocentrique, en résonance co-orbitale
- ▶ ζ_1 oscille autour de zéro

Problématique de la thèse

- ▶ Trajectoires instables dans le système solaire...
- ▶ ...mais existent dans le problème restreint des 3 corps

- ▶ **Idée initiale de la thèse :**

Développement d'une méthode analytique adaptée aux quasi-satellites

Que sont ces orbites quasi-satellites (QS)

Littérature :

→ Terminologie est assez flou !

- ▶ Quasi-satellite : *“satellite rétrograde à l'extérieur de la sphère de Hill”*
- ▶ Satellite Rétrograde

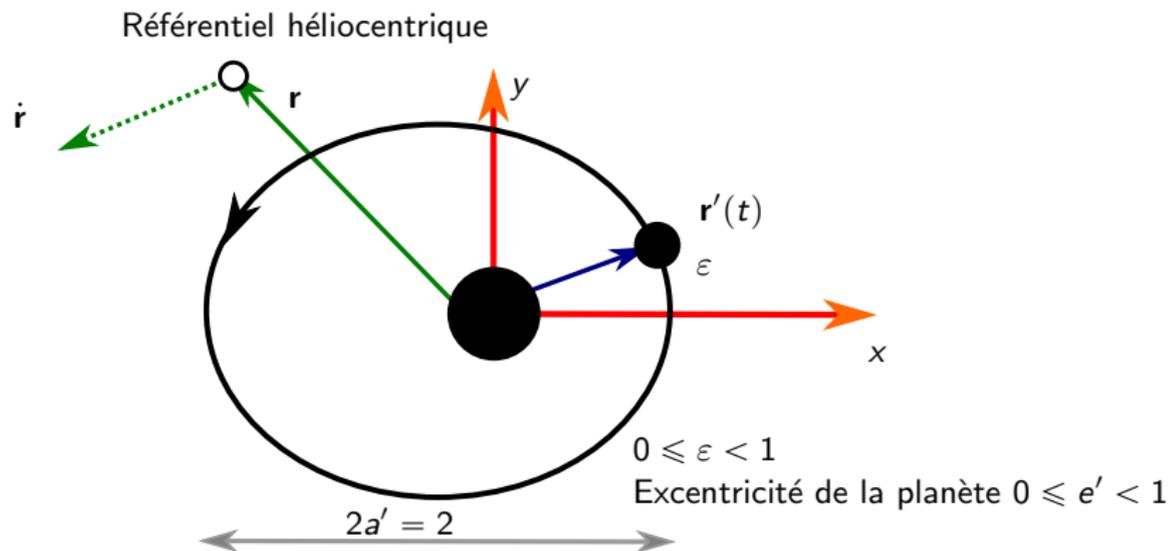
→ Pas de définition claire !

- ▶ Pas de point fixe ou configuration connue associée aux QS

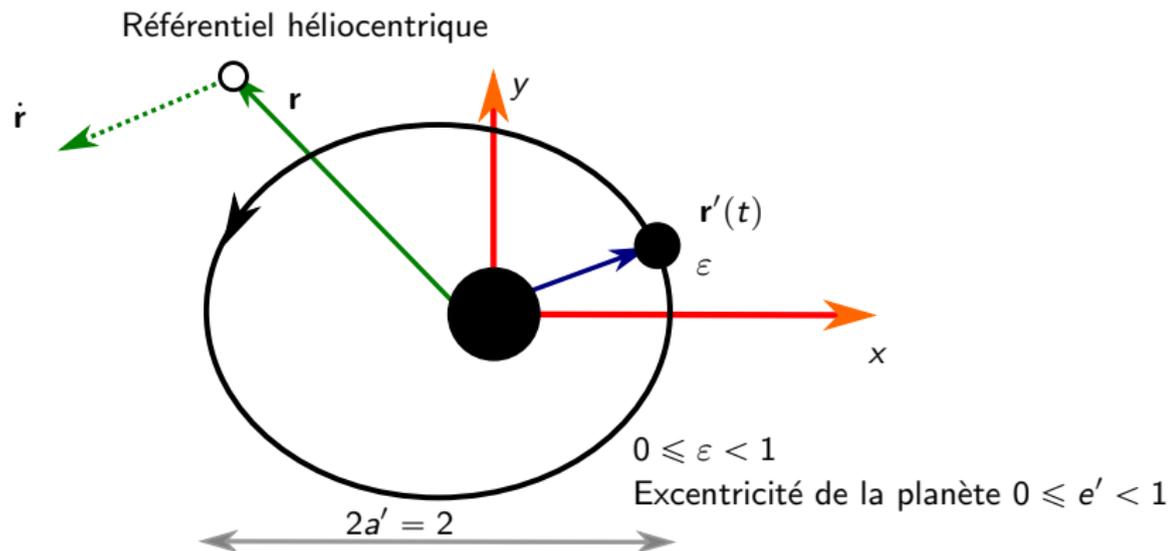
Première partie :

Clarifier la notion de trajectoire quasi-satellite

Le problème restreint des 3 corps plan

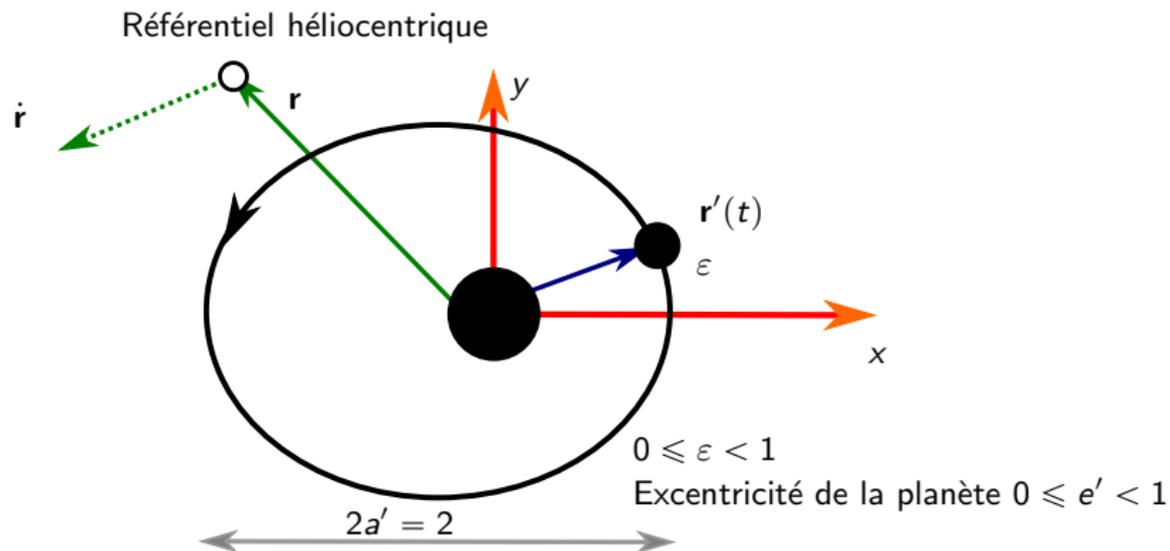


Le problème restreint des 3 corps plan



Problème non autonome + 2 degrés de liberté

Le problème restreint des 3 corps plan



~~Problème non autonome + 2 degrés de liberté~~
 \Rightarrow Problème autonome + 3 degrés de liberté

Cadre perturbatif

- ▶ **Hamiltonien du problème :**

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) := \mathcal{H}_K(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \mathcal{H}_P(\mathbf{r}, t)$$

avec

$$\mathcal{H}_K(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) := \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \quad (2 \text{ corps particule-étoile})$$

et

$$\mathcal{H}_P(\mathbf{r}, t) := -\varepsilon \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)\|} - \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} - \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}'(t) \rangle}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \right) \quad (\text{perturbation})$$

- ▶ **Théorie des perturbations :**

ε : petit paramètre

- ▶ **Hamiltonien du problème :**

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) := \mathcal{H}_K(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \mathcal{H}_P(\mathbf{r}, t)$$

avec

$$\mathcal{H}_K(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) := \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} \quad (2 \text{ corps particule-étoile})$$

et

$$\mathcal{H}_P(\mathbf{r}, t) := -\varepsilon \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)\|} - \frac{1}{\|\mathbf{r}\|} - \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}'(t) \rangle}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \right) \quad (\text{perturbation})$$

- ▶ **Théorie des perturbations :**

ε : petit paramètre

Valable \iff particule et planète sont suffisamment éloignées

⚠ : Condition non garantie en résonance co-orbitale
(collision planète-particule)

Variables canoniques adaptées à la résonance co-orbitale

► Introduction d'un jeu de variables adaptées

$$\begin{aligned} u = \sqrt{a} - 1 \\ \zeta_1 = \lambda - \lambda' \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \Gamma = \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) \\ \varpi \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \tilde{\Lambda}' \\ \zeta_2 = \lambda' \end{aligned}$$

► Hamiltonien :

$$H = H_K + H_P$$

... 3 échelles de temps

- $(\zeta_2, \tilde{\Lambda}')$: régime "rapide" (*position sur l'ellipse*)
- (ζ_1, u) : régime "semi-rapide" (*oscillation de ζ_1*)
- (Γ, ϖ) : régime "séculaire" (*déformation de l'ellipse et précession*)

Variables canoniques adaptées à la résonance co-orbitale

► Introduction d'un jeu de variables adaptées

$$\begin{aligned} u = \sqrt{a} - 1 & , & \Gamma = \sqrt{a}(1 - \sqrt{1 - e^2}) & , & \tilde{\Lambda}' \\ \zeta_1 = \lambda - \lambda' & , & \varpi & , & \zeta_2 = \lambda' \end{aligned}$$

► Hamiltonien :

$$H = H_K + H_P$$

... 3 échelles de temps

- $(\zeta_2, \tilde{\Lambda}')$: régime "rapide" (*position sur l'ellipse*)
- (ζ_1, u) : régime "semi-rapide" (*oscillation de ζ_1*)
- (Γ, ϖ) : régime "séculaire" (*déformation de l'ellipse et précession*)

⇒ Réduction par moyennisation de H sur l'angle ζ_2

Principe de moyennisation :

- ▶ **Transformation canonique :**

$$H \longrightarrow \bar{H} + H_*$$

- ▶ \bar{H} , hamiltonien moyen

$$\bar{H} = H_K + \bar{H}_P$$

où

$$\bar{H}_P(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi) := \frac{n'}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_P(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, \zeta_2) d\zeta_2$$

- ▶ H_* reste en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$...

Principe de moyennisation :

- ▶ Transformation canonique :

$$H \longrightarrow \bar{H} + H_*$$

- ▶ \bar{H} , hamiltonien moyen

$$\bar{H} = H_K + \bar{H}_P$$

où

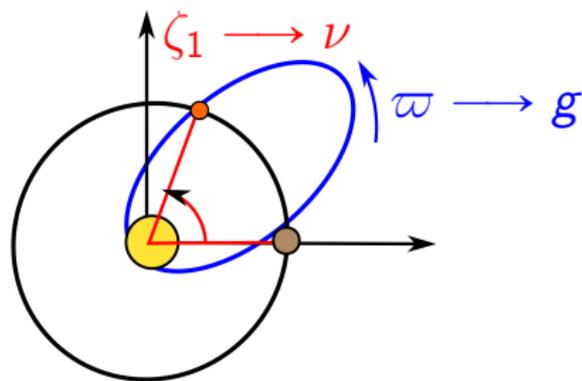
$$\bar{H}_P(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi) := \frac{n'}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_P(\zeta_1, u, \Gamma, \varpi, \zeta_2) d\zeta_2$$

- ▶ H_* reste en $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$...

⚠ : particule à proximité de la planète : $H_* \gg \bar{H}$

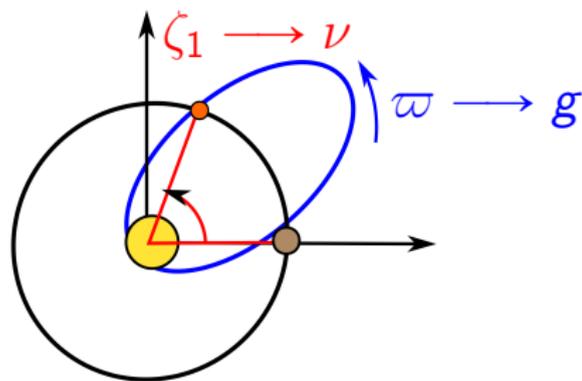
⇒ région exclue de l'étude dans le problème moyen

Étude du cas circulaire-plan



- ▶ Invariance par rotation
- ▶ \bar{H} indépendant de ϖ
- ▶ Γ intégrale première

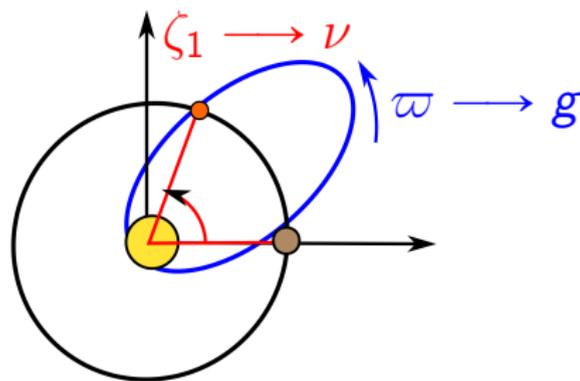
Étude du cas circulaire-plan



- ▶ Invariance par rotation
- ▶ \bar{H} indépendant de ϖ
- ▶ Γ intégrale première

⇒ **Réduction du problème**

Étude du cas circulaire-plan

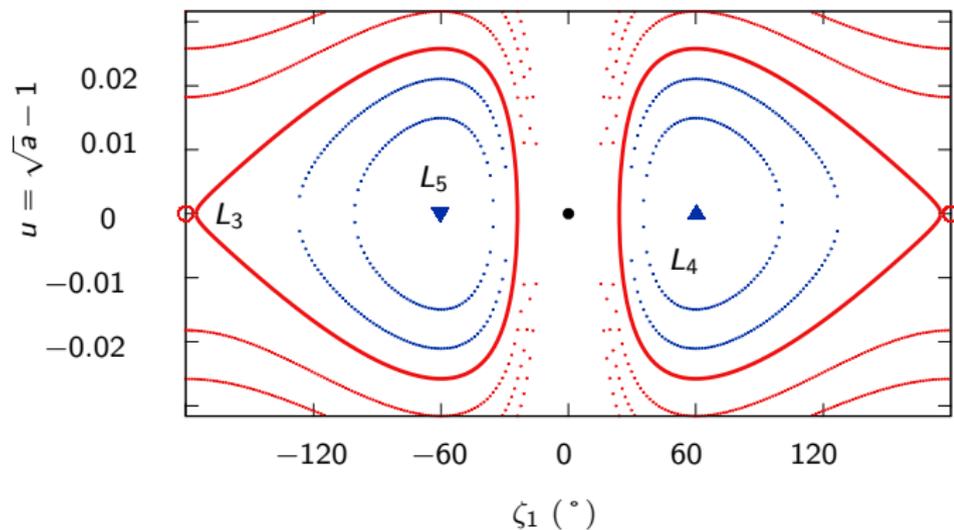


- ▶ Invariance par rotation
- ▶ \bar{H} indépendant de ϖ
- ▶ Γ intégrale première

⇒ **Réduction du problème**

- ▶ Fixer Γ (paramètre)
- ▶ problème **intégrable**
- ▶ étude du régime “semi-rapide”
- ▶ séculaire $g \longrightarrow \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Gamma}$

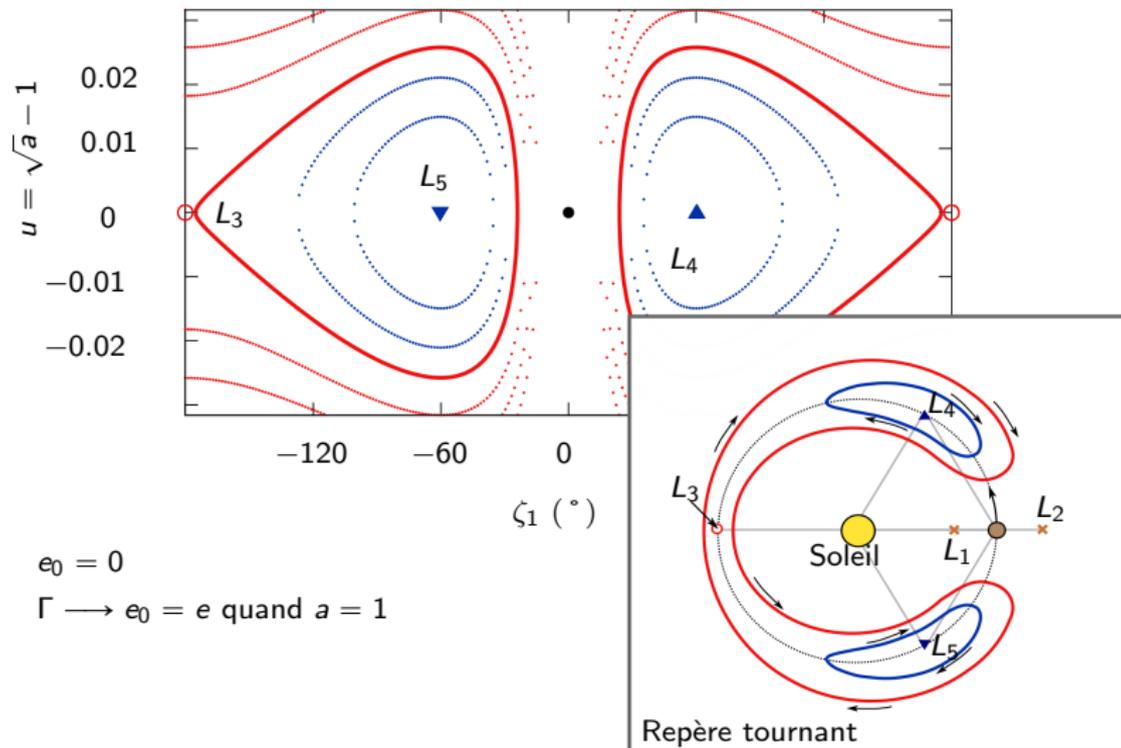
Portraits de phase (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)



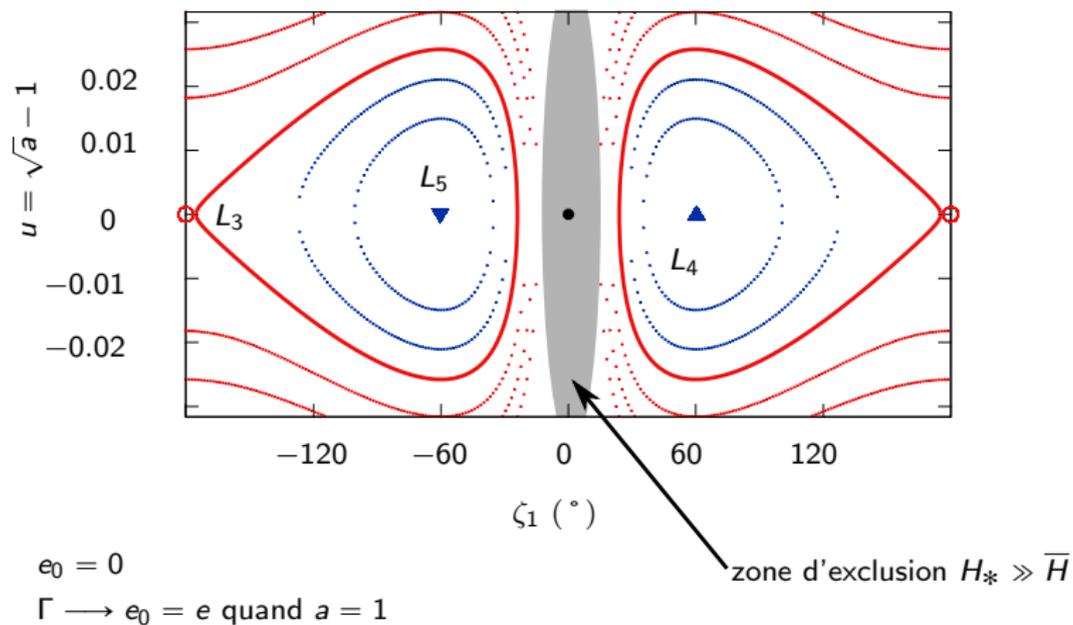
$$e_0 = 0$$

$$\Gamma \longrightarrow e_0 = e \text{ quand } a = 1$$

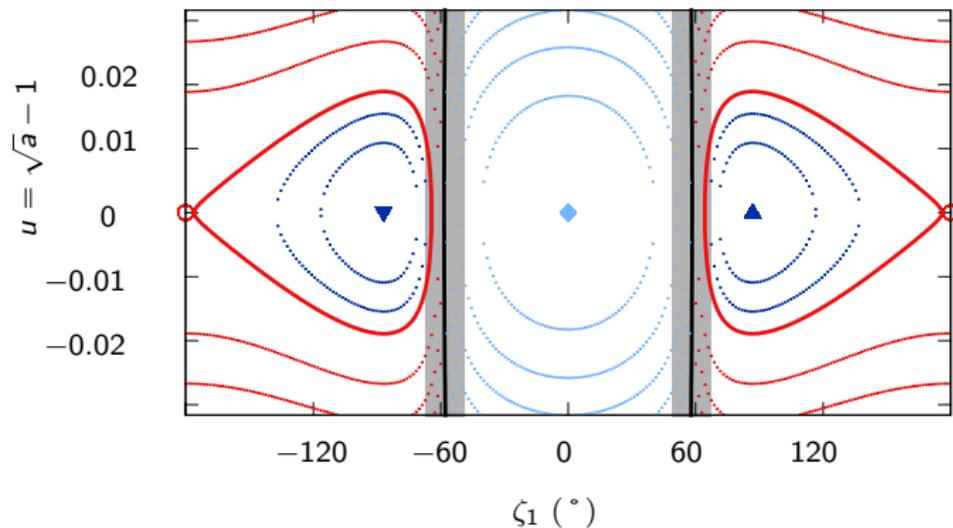
Portraits de phase (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)



Portraits de phase (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)



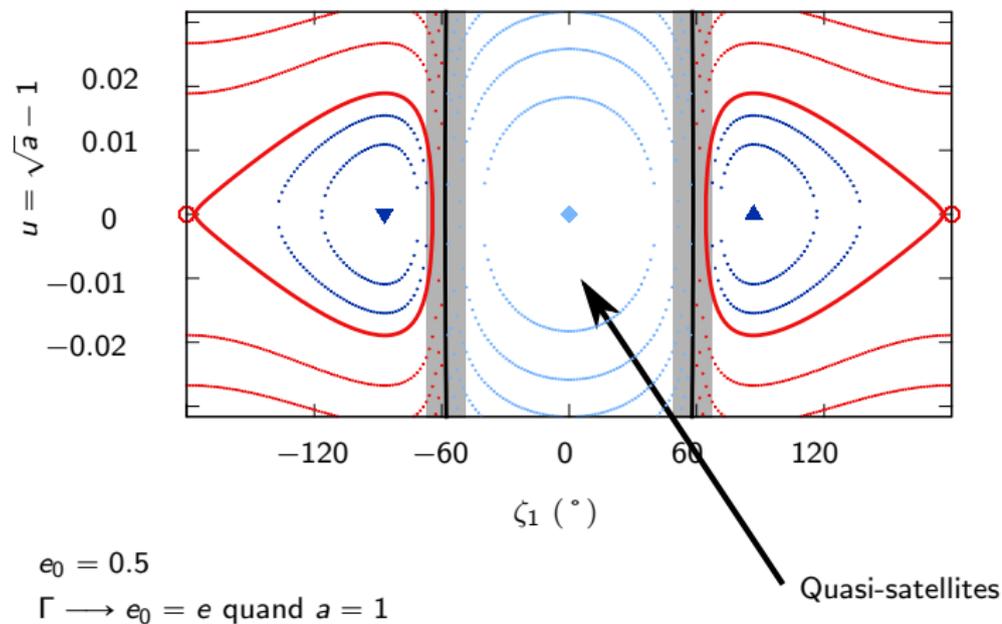
Portraits de phase (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)



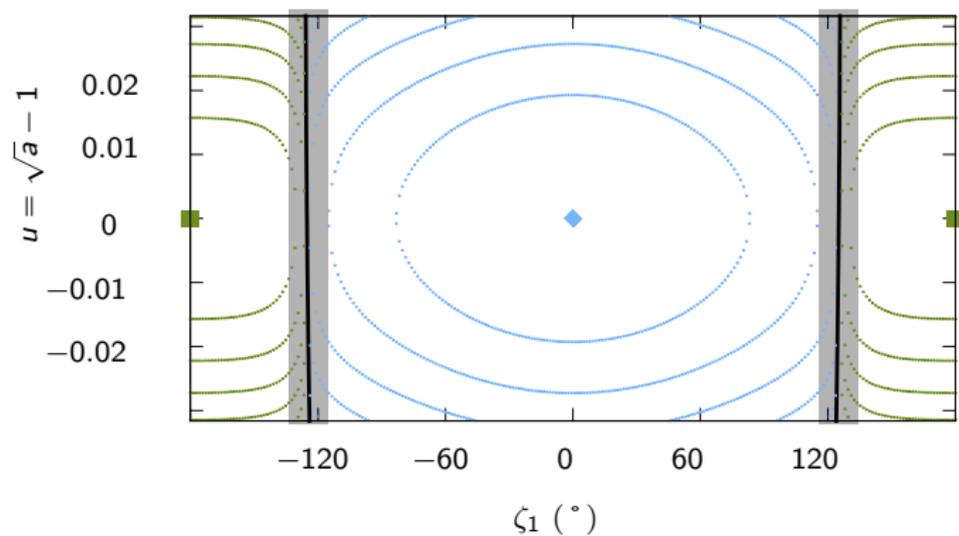
$$e_0 = 0.5$$

$\Gamma \rightarrow e_0 = e$ quand $a = 1$

Portraits de phase (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)



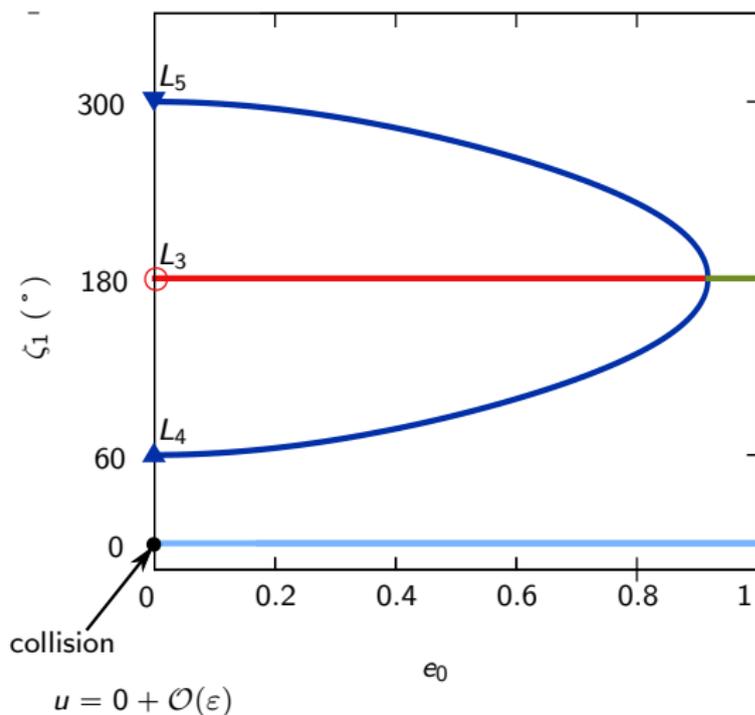
Portraits de phase (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)



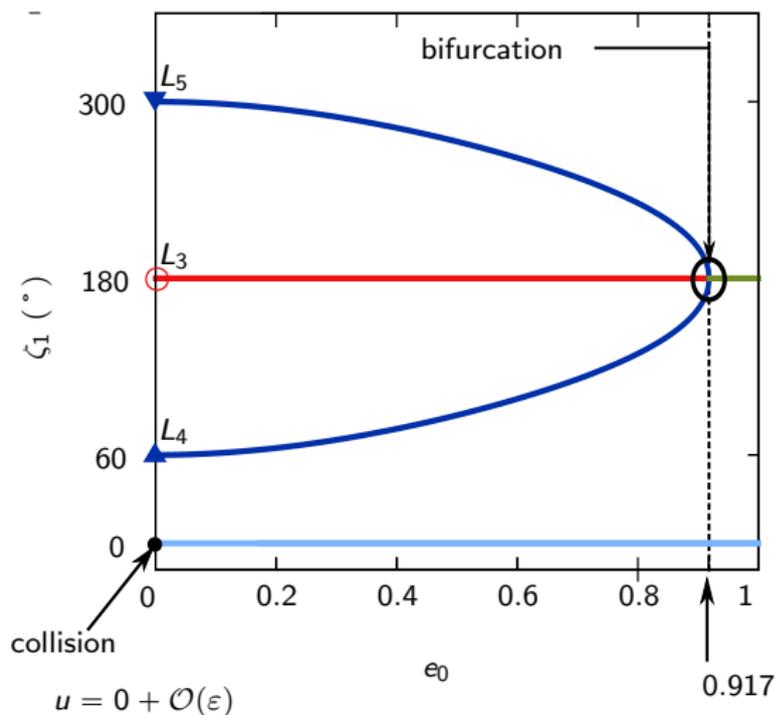
$$e_0 = 0.95$$

$$\Gamma \longrightarrow e_0 = e \text{ quand } a = 1$$

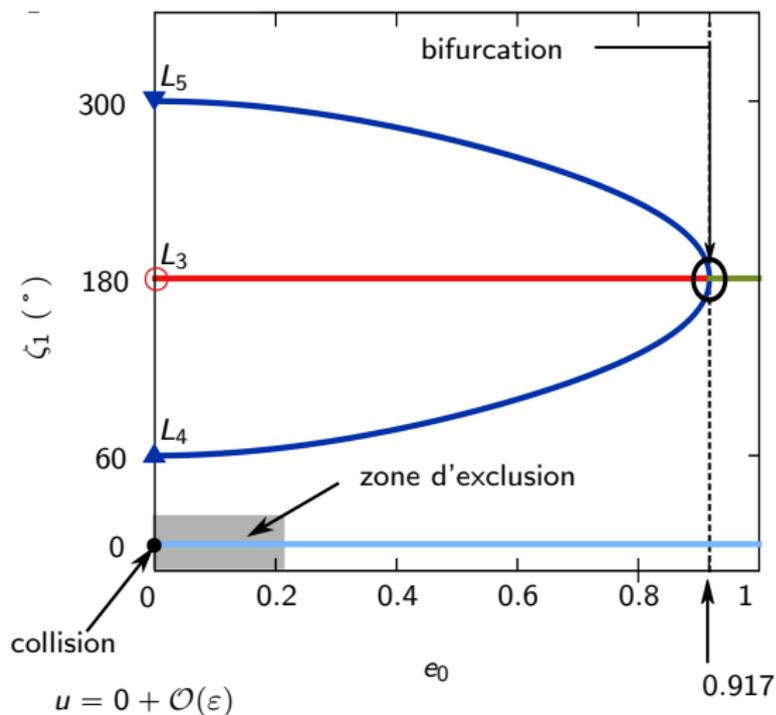
Familles de points fixes (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)



Familles de points fixes (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)



Familles de points fixes (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)



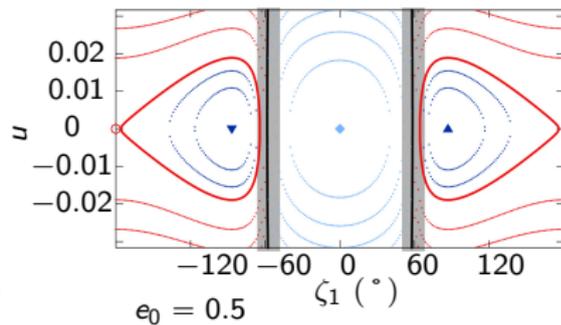
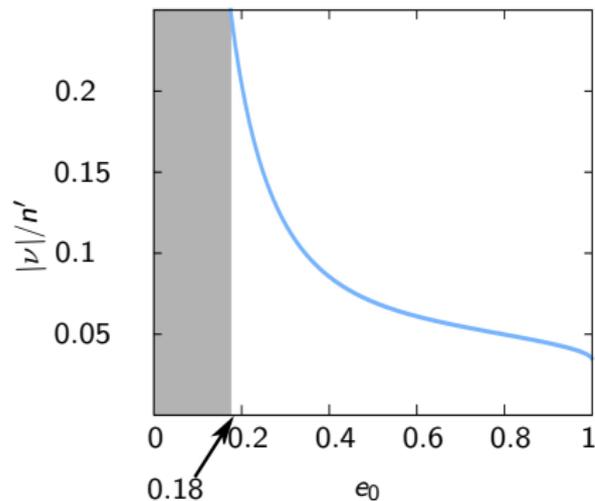
La zone d'exclusion

- ▶ **Problème moyen** : fréquences \ll fréquence de moyennisation
- ▶ **Définition de la zone d'exclusion**

$$|\nu|, |g| > \frac{n'}{4}$$

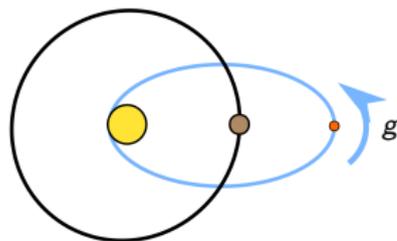
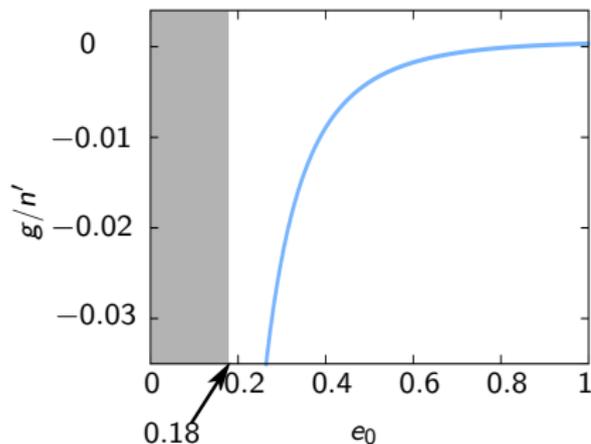
Familles de points fixes (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)

Fréquence ν



Familles de points fixes (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)

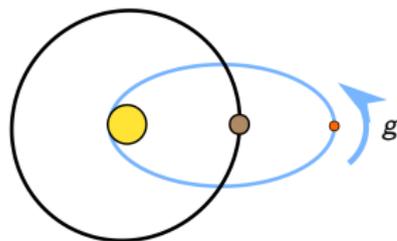
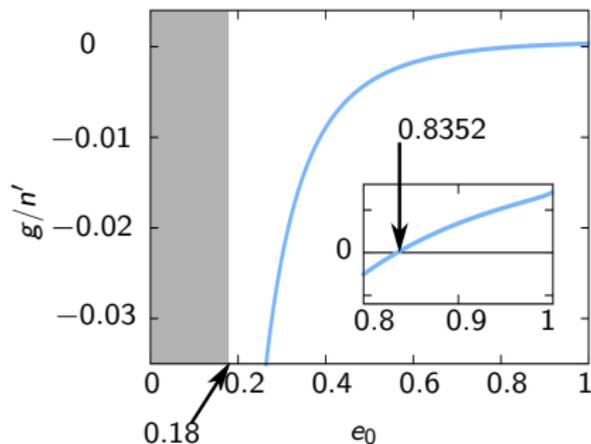
Fréquence g



$$g = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Gamma}$$

Familles de points fixes (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)

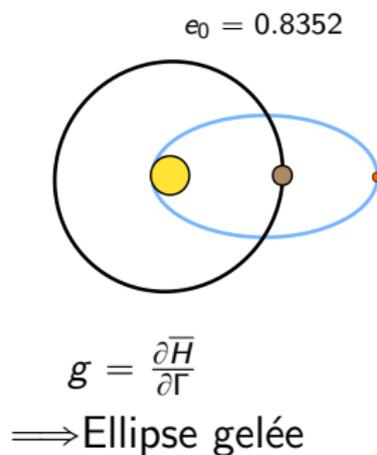
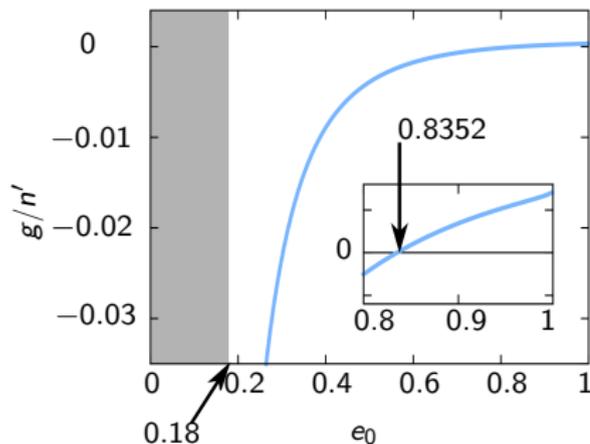
Fréquence g



$$g = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \Gamma}$$

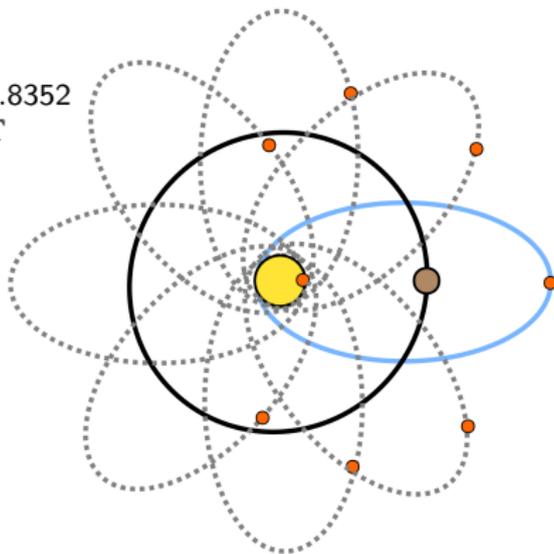
Familles de points fixes (système de type "Soleil-Jupiter" ; $\varepsilon = 10^{-3}$)

Fréquence g

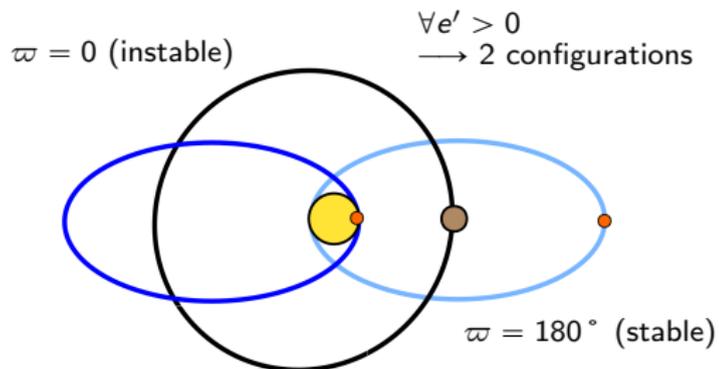


Ellipse gelée en dynamique quasi-satellite

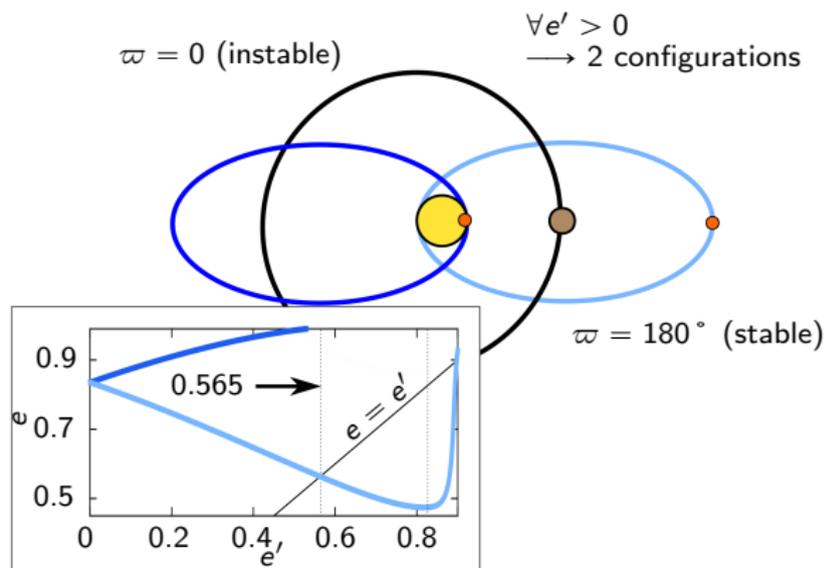
$$e = 0.8352$$
$$\varpi \in \mathbb{T}$$



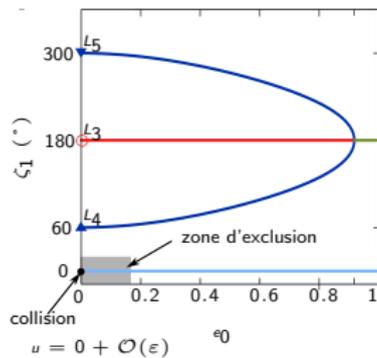
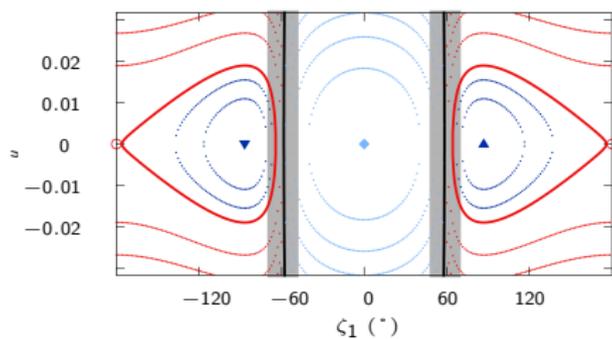
Ellipse gelée en dynamique quasi-satellite



Ellipse gelée en dynamique quasi-satellite

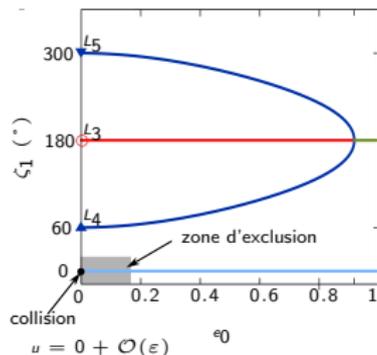
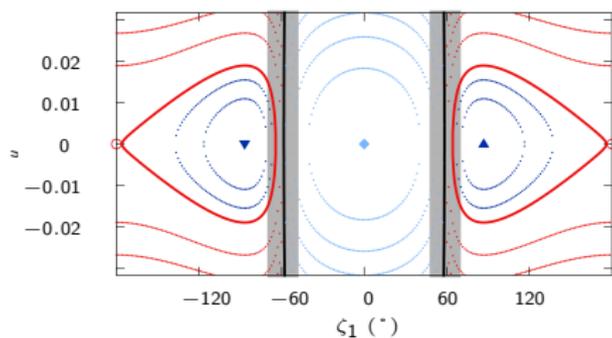


Cas circulaire-plan en résonance co-orbitale :



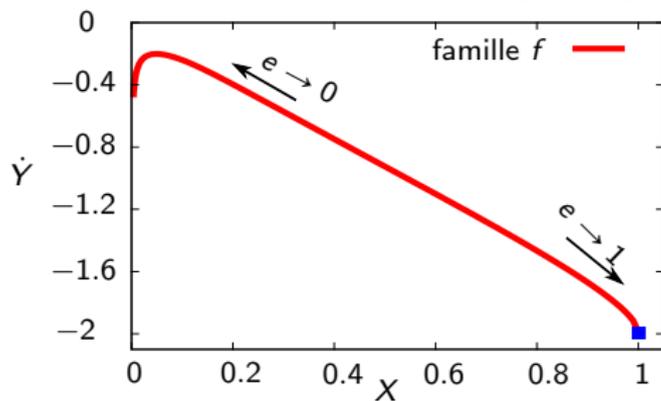
Approche classique : repère tournant avec la planète

Cas circulaire-plan en résonance co-orbitale :

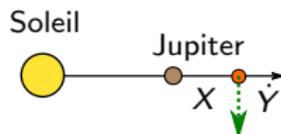


Approche classique : repère tournant avec la planète

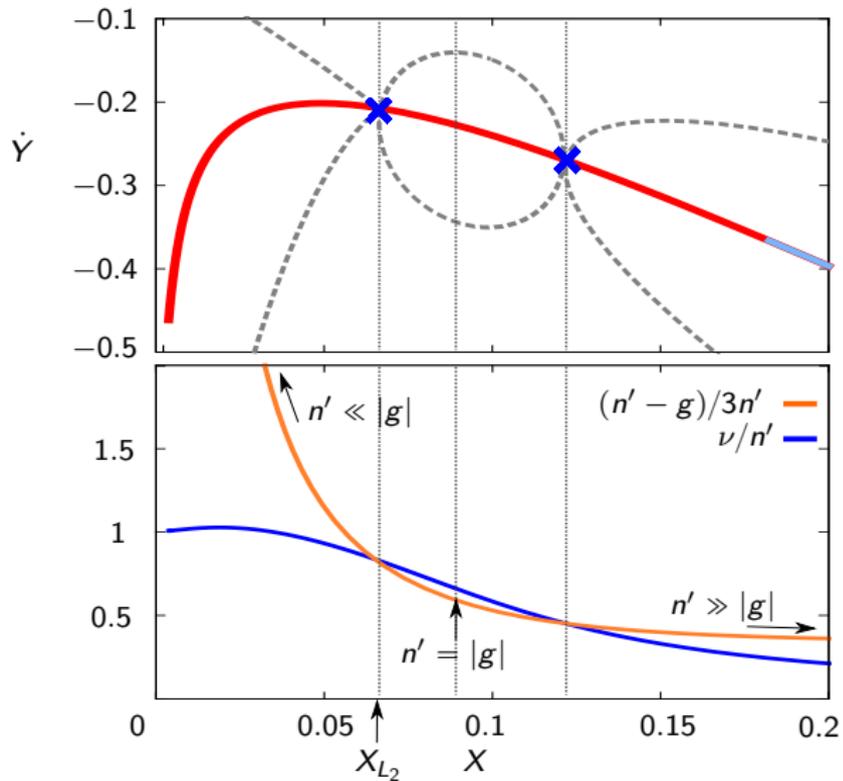
Famille f : Famille d'orbites périodiques des satellites rétrogrades



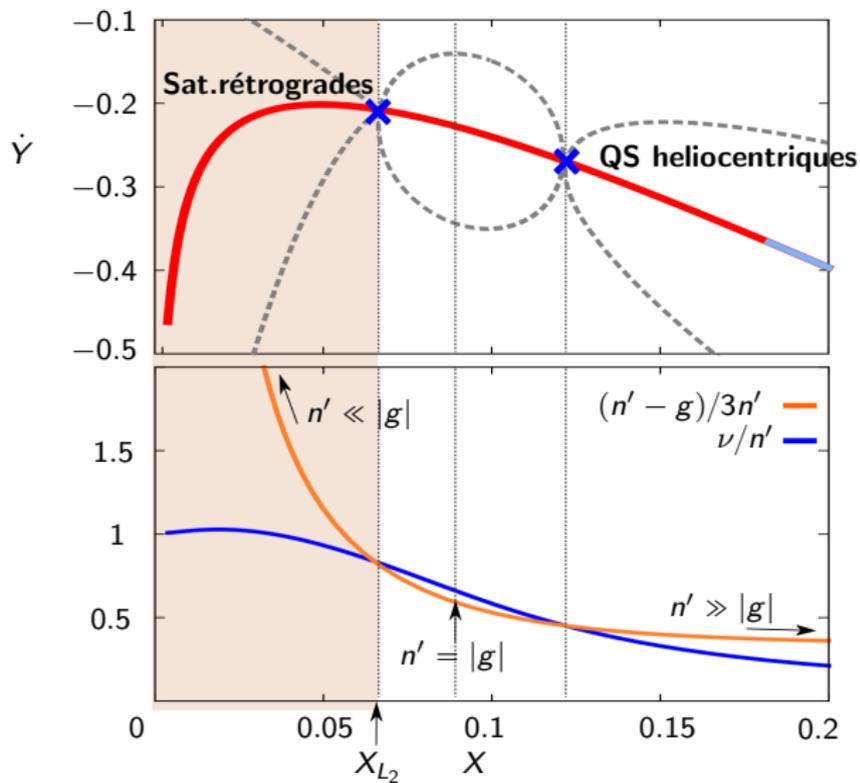
Travaux de Hénon, 1969 ; Benest, 1974



Voisinage de la famille f



Voisinage de la famille f



Seconde partie :

Construction d'une méthode analytique adaptée aux quasi-satellites

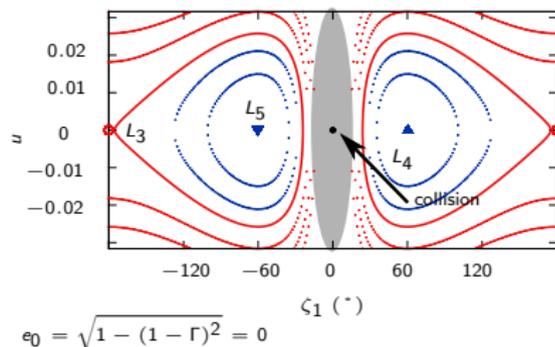
Études du domaine des quasi-satellites

- ▶ **Littérature :**

Namouni, 1999 ; Mikkola *et al.*, 2006 ; Sidorenko *et al.*, 2013 :
→ Études numériques ou semi-analytiques

- ▶ **Méthode analytique classique :**

Développement de \bar{H} au voisinage des configurations quasi-circulaires



...mais dans ce cas la configuration QS correspond à la collision

Études du domaine des quasi-satellites

- ▶ **Littérature :**

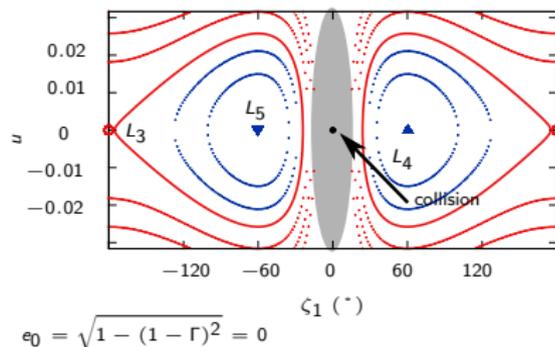
Namouni, 1999 ; Mikkola *et al.*, 2006 ; Sidorenko *et al.*, 2013 :

→ Études numériques ou semi-analytiques

⇒ **Pas d'études analytiques**

- ▶ **Méthode analytique classique :**

Développement de \bar{H} au voisinage des configurations quasi-circulaires



...mais dans ce cas la configuration QS correspond à la collision

Études du domaine des quasi-satellites

- ▶ **Littérature :**

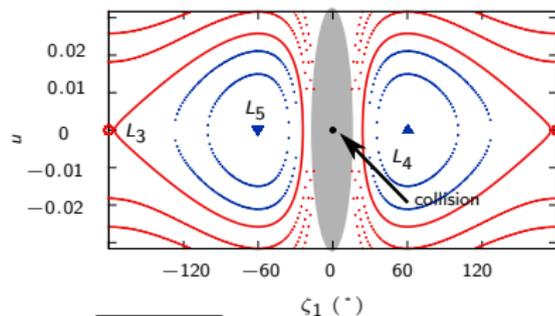
Namouni, 1999 ; Mikkola *et al.*, 2006 ; Sidorenko *et al.*, 2013 :

→ Études numériques ou semi-analytiques

⇒ **Pas d'études analytiques**

- ▶ **Méthode analytique classique :**

Développement de \bar{H} au voisinage des configurations quasi-circulaires



$$e_0 = \sqrt{1 - (1 - \Gamma)^2} = 0$$

...mais dans ce cas la configuration QS correspond à la collision

⇒ **Échec de la méthode classique pour les QS**

Étude du cas circulaire-plan

- ▶ Trajectoire excentrique
- ▶ Au voisinage de $\zeta_1 = u = 0$

Développement de Taylor en $\zeta_1 = u = 0$

- ▶ $\Gamma > 0$ fixé :

$$\bar{H}(\zeta_1, u, \Gamma) = \sum_{(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2} \alpha^{(d_1, d_2)}(\Gamma) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}$$

- ▶ $\Gamma \rightarrow 0$: $\alpha^{(d_1, d_2)}(\Gamma) \rightarrow +\infty$ (collision)

Étude du cas circulaire-plan

- ▶ Trajectoire excentrique
- ▶ Au voisinage de $\zeta_1 = u = 0$

Développement de Taylor en $\zeta_1 = u = 0$

- ▶ $\Gamma > 0$ fixé :

$$\bar{H}(\zeta_1, u, \Gamma) = \sum_{(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2} \alpha^{(d_1, d_2)}(\Gamma) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}$$

- ▶ $\Gamma \rightarrow 0$: $\alpha^{(d_1, d_2)}(\Gamma) \rightarrow +\infty$ (collision)

\implies **Idée : obtenir $\alpha^{(d_1, d_2)}(\Gamma)$ par des séries de Laurent en Γ**

Comment faire pour obtenir $\alpha^{(d_1, d_2)}(\Gamma)$?

Mettre en évidence \mathcal{Y}

- ▶ fonction “distance” à la singularité en $\{\zeta_1 = u = \Gamma = 0\}$
- ▶ approximation du carré de la distance mutuelle

$$\mathcal{Y} \geq 0, \quad \mathcal{Y}|_{\{\zeta_1 = u = \Gamma = 0\}} = 0$$

telle que

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{Y} + \mathcal{X}}} \quad \text{où} \quad \mathcal{X} = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 - \mathcal{Y}$$

Développement de Taylor au voisinage de \mathcal{Y}

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{Y}}} \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{2m!}{(2^m m!)^2} \left(\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}} \right)^m \quad \text{convergent} \quad \iff \left| \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}} \right| < 1$$

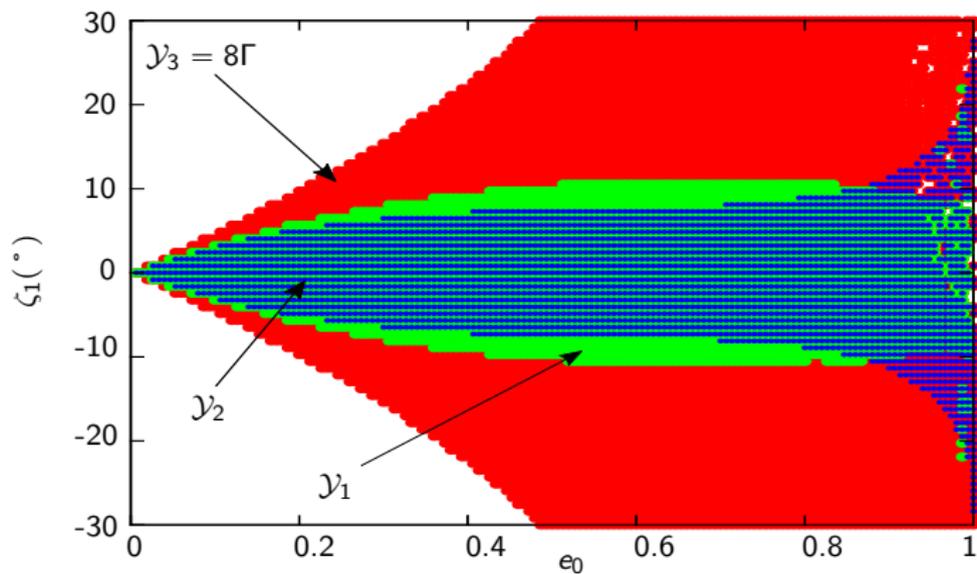
Fonction “distance” adaptée

- ▶ $\mathcal{Y}_1(\Gamma, \zeta_2 - \varpi) = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2|_{\zeta_1=u=0} = \mathcal{A}_0(\zeta_2 - \varpi)\Gamma + \mathcal{O}(\sqrt{\Gamma}^{3/2})$
- ▶ $\mathcal{Y}_2(\Gamma, \zeta_2 - \varpi) = \mathcal{A}_0(\zeta_2 - \varpi)\Gamma = (8 - 6 \cos(\zeta_2 - \varpi))\Gamma$
- ▶ $\mathcal{Y}_3(\Gamma) = \max_{\zeta_2 \in \mathbb{T}} \mathcal{Y}_2(\Gamma, \zeta_2 - \varpi) = 8\Gamma$

Test de leur domaine de convergence

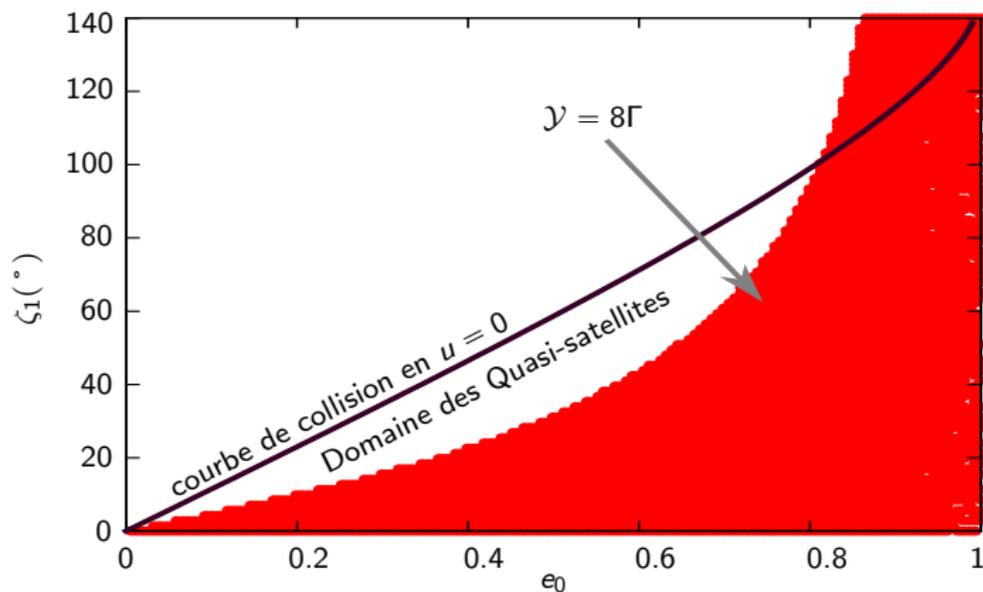
$$\max_{\zeta_2 \in \mathbb{T}} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \leq \sqrt{2\mathcal{Y}}$$

Domaines de convergence



Meilleur choix $\mathcal{Y}_3 = 8\Gamma$!

Domaines de convergence



Forme du hamiltonien

- ▶ **Difficulté principale** : trouver une manière de développer \bar{H} en $\zeta_1 = u = 0$
- ▶ **Méthode analytique de développement en série de Laurent** :

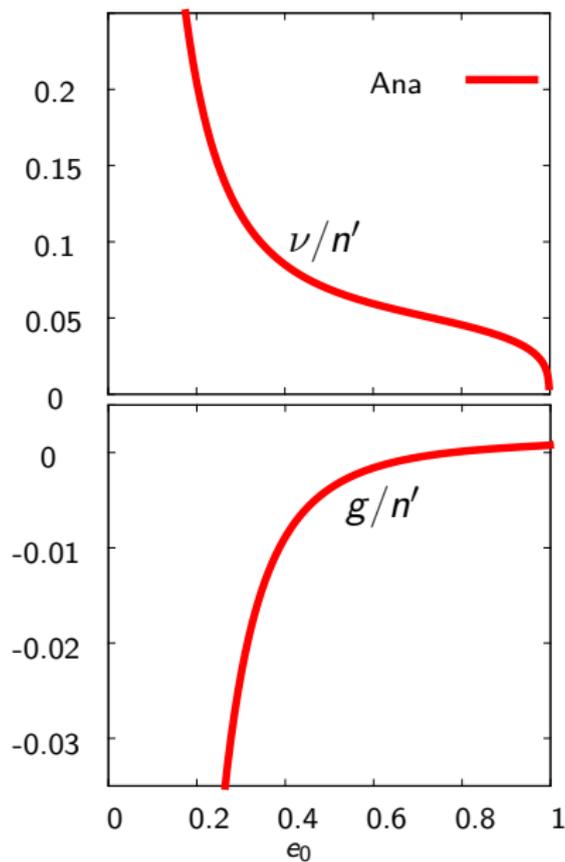
$$\bar{H}(\zeta_1, u, \Gamma) = \sum_{(d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2} \alpha^{(d_1, d_2)}(\Gamma) \zeta_1^{d_1} u^{d_2}$$

où

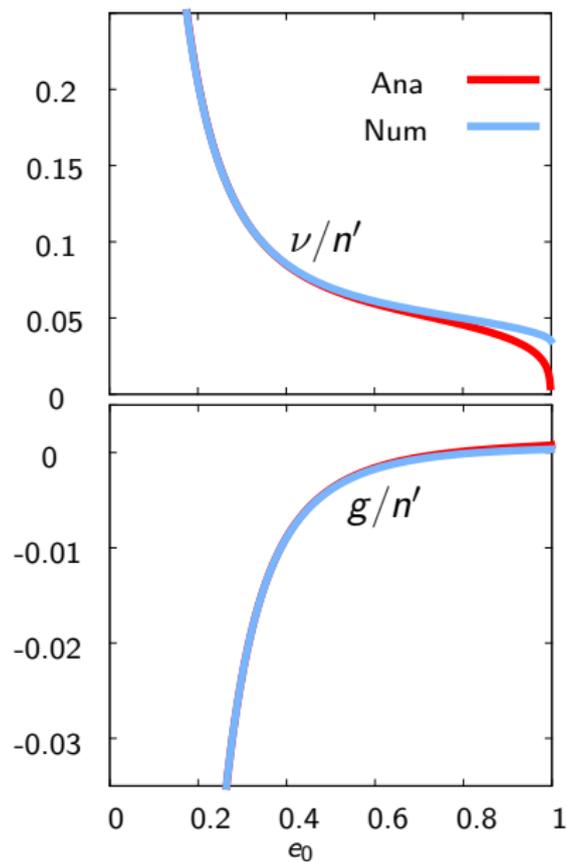
$$\begin{aligned} \alpha^{(d_1, d_2)}(\Gamma) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_{(d_1, d_2), k} \sqrt{\Gamma}^k \\ &= \mathcal{O}(1/\sqrt{\Gamma}^{(d_1 + d_2 + 1)}) \end{aligned}$$

- ▶ \implies **Étude du domaine avec les techniques classiques de théories des perturbations**

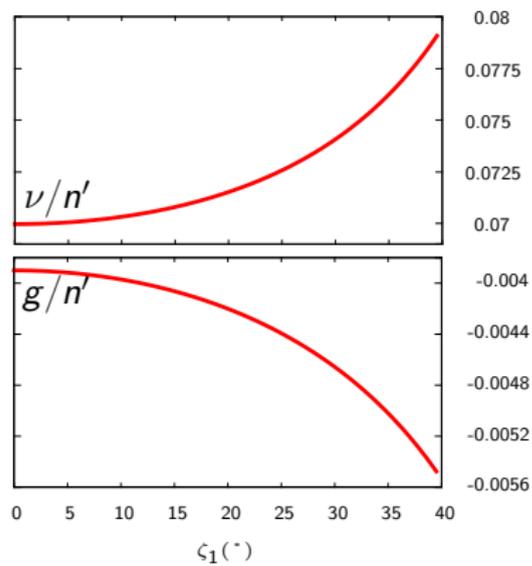
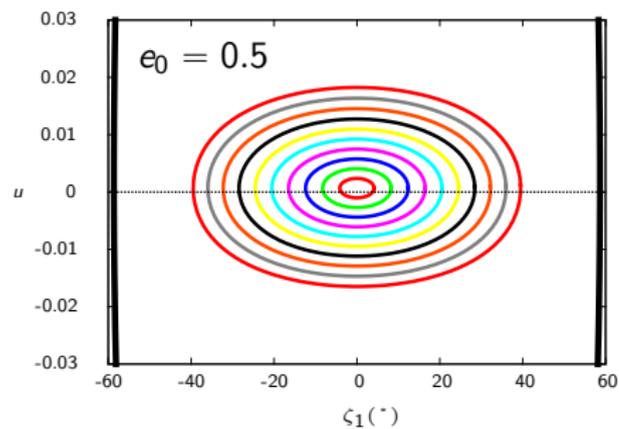
Application : Fréquences le long de la famille de points fixes



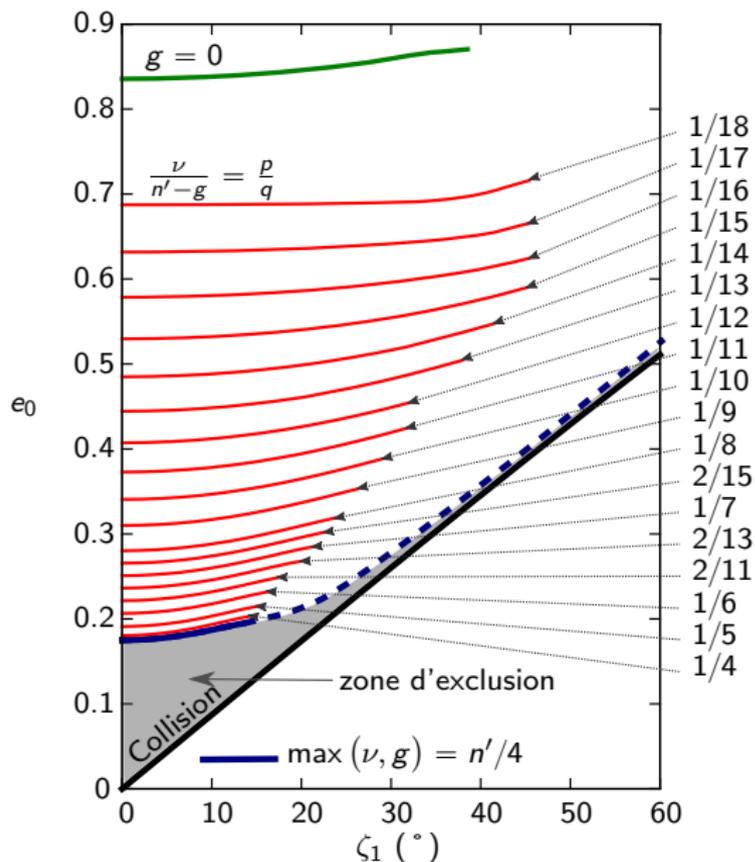
Application : Fréquences le long de la famille de points fixes



Application : Forme normale de Birkhoff



Application : Structure de résonance du domaine



Conclusions et Perspectives

Cadre simple : circulaire-plan

- ▶ → Définition précise des trajectoires QS
- ▶ → Développement d'une méthode analytique adaptée aux QS

Généralisation à des problèmes plus difficiles ?

- ▶ cas : excentrique-plan
- ▶ cas : spatial
- ▶ Problème planétaire des 3 corps ($m_1, m_2 \ll m_0$)

Cadre simple : circulaire-plan

- ▶ → Définition précise des trajectoires QS
- ▶ → Développement d'une méthode analytique adaptée aux QS

Généralisation à des problèmes plus difficiles ?

- ▶ cas : excentrique-plan
→ voir **manuscrit**
- ▶ cas : spatial

- ▶ Problème planétaire des 3 corps ($m_1, m_2 \ll m_0$)

Cadre simple : circulaire-plan

- ▶ → Définition précise des trajectoires QS
- ▶ → Développement d'une méthode analytique adaptée aux QS

Généralisation à des problèmes plus difficiles ?

- ▶ cas : excentrique-plan
→ voir manuscrit
- ▶ cas : spatial
→ adaptation du formalisme
- ▶ Problème planétaire des 3 corps ($m_1, m_2 \ll m_0$)

Cadre simple : circulaire-plan

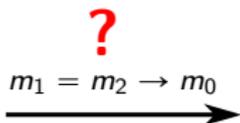
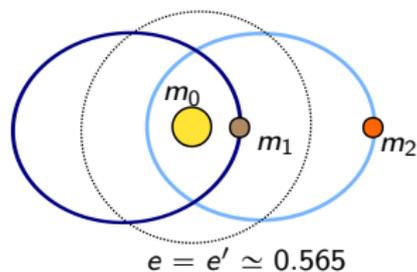
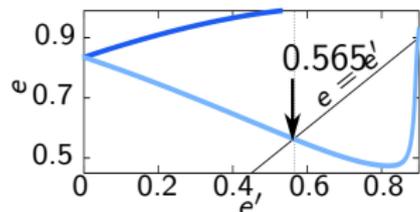
- ▶ → Définition précise des trajectoires QS
- ▶ → Développement d'une méthode analytique adaptée aux QS

Généralisation à des problèmes plus difficiles ?

- ▶ cas : excentrique-plan
→ voir manuscrit
- ▶ cas : spatial
→ adaptation du formalisme
- ▶ Problème planétaire des 3 corps ($m_1, m_2 \ll m_0$)
→ proposition d'une manière de faire le développement

Conclusions et perspectives

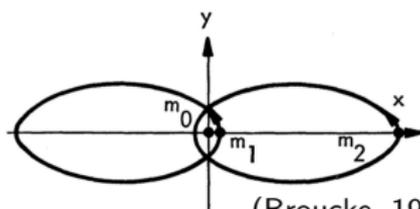
Restreint : $m_1 \ll m_0$ et $m_2 = 0$



Configuration de Broucke-Hénon

b
HELIOCENTRIC
A.1/1

$$m_0 = m_1 = m_2$$



(Broucke, 1974)

Planétaire : $m_1 \ll m_0$ et $m_2 \ll m_0$

Cette configuration existe également (Giuppone et al., 2010)